

数 学

計算用紙

I [1] 関数 $f(x) = 3^{2x-1} - 2 \times 3^{x+1} + 4$ について、 $0 \leq x \leq 3$ のときの最大値と最小値を求めよう。 $t = 3^x$ とおくと、関数 $f(x)$ は

$$g(t) = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} t^2 - \text{ウ} t + \text{エ}$$

$$= \frac{\text{ア}}{\text{イ}} (t - \text{オ})^2 - \text{カキ}$$

と書くことができる。ただし、 t の範囲は

$$\text{ク} \leq t \leq \text{ケコ}$$

になることに注意しよう。関数 $g(t)$ を用いると、元の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めることができる。

よって $f(x)$ は、 $x = \text{サ}$ のとき最大値 シス をとり、

$x = \text{セ}$ のとき最小値 $-\text{ソタ}$ をとる。

[2] k, b を実数の定数とする。 x の 2 次方程式 $x^2 - 4bx = k$ の実数解の個数について調べる。

(1) 座標平面上的放物線 $y = x^2 - 4bx$ の頂点の座標は、

(b , - b^2) である。

(2) $x \geq 0, b = 1$ とする。 $k < -$ のとき解は 0 個、

$k = -$, $k >$ のとき解は 1 個、

- $< k \leq$ のとき解は 2 個である。

(3) k - b^2 のとき解は 2 個、

k - b^2 のとき解は 1 個、

k - b^2 のとき解は 0 個である。

, , の解答群

= ≤ ≥ < >

計算用紙

II [1] 5種類のカードがそれぞれ十分な枚数だけ用意されている。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) すべての種類を含むようにカード10枚を選ぶ組み合わせは、

アイウ

 通りある。

(2) 選ばれない種類があってもよいものとしてカード10枚を選ぶ組み合わせは、

エオカキ

 通りある。

[2] それぞれの面に1～8の数字が書かれた正八面体のサイコロが2つある。このサイコロ2つを同時に投げるとき、少なくとも1つは6以上の目が出る事象をA、出た目の和が偶数となる事象をBとする。このとき、AかつBが起こる確率は、

クケ

 /

コサ

 である。A、Bの少なくともどちらか一方が起こる確率は、

シス

 /

セソ

 である。A、Bのどちらか一方だけが起こる確率は

タチ

 /

ツテ

 である。

計算用紙

Ⅲ [1] 座標平面上における次の直線 g と h のなす角 θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) について考える。

$$\text{直線 } g : y = 2x - 4$$

$$\text{直線 } h : y = \frac{1}{3}x + 1$$

2つの直線 g , h が x 軸の正の向きに対してなす角をそれぞれ α , β とおく。

このとき, $\tan \alpha = \boxed{\text{ア}}$, $\tan \beta = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから,

$$\tan \theta = \tan (\alpha \boxed{\text{エ}} \beta) = \frac{\tan \alpha \boxed{\text{オ}} \tan \beta}{1 \boxed{\text{カ}} \tan \alpha \tan \beta} = \boxed{\text{キ}}$$

が成立する。よって, θ の範囲より,

$$\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

$\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ の解答群

① + ② - ③ × ④ ÷

計算用紙

[2] 下記の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよう。ただし、 $0 \leq x < 2\pi$ とする。

$$f(x) = 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x$$

まず関数 $f(x)$ を 2 倍角の公式を用いて変形すると以下ようになる。

$$f(x) = \sqrt{3} \sin \boxed{\text{ケ}} x - \cos \boxed{\text{コ}} x + \boxed{\text{サ}}$$

次に、三角関数の合成を用いて変形すると以下の式が得られる。

$$f(x) = \boxed{\text{シ}} \sin \left(\boxed{\text{ス}} x - \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} \right) + \boxed{\text{サ}}$$

ただし、 $0 < \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} < \pi$ とする。

$0 \leq x < 2\pi$ なので、

$$-\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}} \leq \boxed{\text{ス}} x - \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} < \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \pi$$

であるから $f(x)$ は、 $x = \frac{\pi}{\boxed{\text{テ}}}$, $\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \pi$ のとき最大値 $\boxed{\text{ニ}}$

をとり、 $x = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}} \pi$, $\frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \pi$ のとき最小値 $\boxed{\text{フ}}$ をとる。

計算用紙

IV あなたはコンビニエンスストアのオーナーとして、まっすぐな国道沿いのどこかに出店することを考えているとしよう。観察した結果、同じ国道沿いにあるAチェーンのコンビニエンスストアと、1 km 離れた別のBチェーンのコンビニエンスストアとの間のどこかに出店することにした。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) Aチェーンに加盟すれば、加盟料は10万円で、売り上げはAチェーンの既存店から1 m 離れるごとに2000円増えるが、輸送費などのコストはAチェーンの既存店からの距離(m)の2乗に対して2倍したものになる。つまり、Aチェーンの既存店から100 m 離れたときの売り上げは20万円で、コストは2万円である。

ではAチェーンに加盟したとしよう。Aチェーンの既存店から x m 離れて出店したとき、売り上げからコストと加盟料を差し引いた利益は以下の通りである。

$$- \boxed{\text{ア}} x^2 + \boxed{\text{イウエオ}} x - 100000 \text{ (円)}$$

この利益を最大にするような出店位置を考えよう。利益を最大にする出店位置は既存のAチェーンから $\boxed{\text{カ}} \times 10^2$ m 離れたところであり、そのときの利益は $\boxed{\text{キク}} \times 10^4$ 円である。

(2) Bチェーンに加盟すれば、加盟料は25万円で、売り上げはBチェーンの既存店から1 m 離れるごとに3000円増えるが、輸送費などのコストはBチェーンの既存店からの距離(m)の2乗に対して $\frac{5}{2}$ 倍したものになる。

ではBチェーンに加盟したとしよう。Bチェーンの既存店から y m 離れて出店したとき、売り上げからコストと加盟料を差し引いた利益は以下の通りである。

$$- \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} y^2 + \boxed{\text{サシスセ}} y - 250000 \text{ (円)}$$

この利益を最大にするような出店位置を考えよう。利益を最大にする出店位置は既存のBチェーンから $\boxed{\text{ソ}} \times 10^2$ m 離れたところであり、そのときの利益は $\boxed{\text{タチ}} \times 10^4$ 円である。

(3) しかし立地場所はAチェーンの既存店とBチェーンの既存店の間と決めているので、Bチェーンの既存店から1 m 離れるごとに、Aチェーンの既存店に1 m 近づくことになる。

コンサルタントによると、Bチェーンに加盟すると、Aチェーンに顧客を奪われ、「Bチェーンの既存店から1 m 離れるごとに3000円売り上げが増えるが、Aチェーンの既存店に1 m 近づくごとに t 円売り上げが減少する」とのことだった。つまり、Bチェーンに加盟し、既存のBチェーンから y m 離れたときの売り上げが(2)と違い、 $(\boxed{\text{サシスセ}} - t)y$ 円になる。ただし t は、 $0 \leq t < \boxed{\text{サシスセ}}$ とする。一方、Aチェーンに加盟するとどこに立地してもBチェーンに顧客が奪われることはなく、(1)で考えた内容と同じだという。コンサルタントの助言を加味したうえで、Aチェーンに加盟するかBチェーンに加盟するかを考え直してみよう。

Bチェーンに加盟した場合、既存のBチェーンから

$\boxed{\text{ツ}} \times 10^2 - \frac{t}{\boxed{\text{テ}}}$ m 離れたところに出店すると利益が最大になる。よって、売り上げの減少分 t が

$$0 \leq t < (\boxed{\text{トナ}} - \boxed{\text{ニ}} \sqrt{\boxed{\text{ヌネ}}}) \times 10^2$$

を満たすなら、Bチェーンに加盟して出店した場合に得られる利益の最大値は、Aチェーンに加盟して出店した場合に得られる利益の最大値よりも高くなる。

計算用紙

計算用紙